Université Côte d'Azur - M1 IM/MPA - Méthodes numériques stochastiques

CONTRÔLE CONTINU NUMÉRO 1 – PARTIE SUR PAPIER

Préliminaire. Durée : 1h. Documents non autorisés.

Exercice. On considère la fonction f de densité

$$f(x) = \frac{1}{Z}\big(x - \lfloor x \rfloor\big) \exp(-x) \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $Z = \int_0^{+\infty} (x - \lfloor x \rfloor) \exp(-x) dx$ et où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

On rappelle que $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x \in [n, n+1[$, pour x réel et n entier.

(1) Démontrer que, pour U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, la variable aléatoire $Y = \lfloor -\ln(U) \rfloor$ suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre de succès e^{-1}, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\Big(\big\{\lfloor -\ln(U) \rfloor = n\big\}\Big) = e^{-n}\big(1 - e^{-1}\big).$$

(2) Soit X une variable aléatoire, indépendante de U, de loi de densité

$$g(x) = \frac{1}{Z'} x \exp(-x) \mathbf{1}_{]0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $Z' = \int_0^1 x \exp(-x) dx$. Montrer que la variable aléatoire

$$X + Y$$

suit une loi de densité f.

Déduire de la démonstration la valeur de Z en fonction de Z'.

(3) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la loi conditionnelle de U sachant $\{V \leq U \exp(-U)\}$ a g pour densité.